TENTO PROJEKT JE SPOLUFINANCOVÁN EVROPSKÝM SOCIÁLNÍM FONDEM A STÁTNÍM ROZPOČTEM ČESKÉ REPUBLIKY

M\_2\_01

**Pracovní list**

Téma: Úloha typu „Zebry“

Zpracovala: RNDr. Dana Daňková

Úloha typu „Zebry“:

Automobilového závodu se zúčastnila auta značek Jaguár, Volvo, Mazda a Polo. Víme, že:

1. Mazda spotřebovala nejméně paliva.
2. Volvo dojelo předposlední, ale spotřebou není předposlední.
3. Polo nezvítězilo.
4. Auto s nejmenší spotřebou nedojelo těsně po vítězi.
5. Zvítězilo auto s druhou nejmenší spotřebou.

Matematický model klasické zebry:

Máme m objektů ( v úloze m = 4 auta ) a na nich je definováno n znaků Z1, Z2,… , Zn ( v úloze n = 3, znaky jsou názvy, spotřeba a pořadí dojezdu ). Z1 = , Z2 = , Z3 = .

Každý objekt je popsán n-ticí hodnot znaků, po jedné z každé z množin Zi, tj. lze jej chápat jako prvek jisté n-ární relace R je podmnožinou Z1xZ2x…xZn. . U klasické zebry předpokládáme jednoznačnost v tom smyslu, že každá hodnota každého znaku je v právě jednom prvku relace R. Tato relace je tedy tvořena m prvky , uspořádanými n ticemi tvaru r = , kde Zi , i = 1,2,…,n, k = 1,2,…,m. Cílem řešení zebry je nalezení těchto m prvků relace R.

Řešení klasické zebry

Popíšeme si „ruční“ algoritmus řešení klasické zebry. K tomu si sestavíme tabulku kartézského součinu Z x Z , t.j. čtvercové schéma n x n = 3 x 3 bloků, přičemž v každém bloku bude m x m = 4 x 4 elementů. Celkem tedy schema obsahuje mn x mn = 12 x 12 prázdných čtverečků. Doporučujeme studentům , aby si takové schéma připravili a postupně je doplňoval tak, jak o to m budeme pojednávat.

Jestliže R, zapíšeme do příslušného okénka schématu 1, pokud zjistíme, že není prvkem R, zapíšeme sem 0, zatím nerozhodnutá místa zůstanou nevyplněna. Jako první do schématu zaznamenáme důsledky reflexivnosti ( 1 v hlavní diagonále) a vstupní podmínky (tab. 1):

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | J | V | M | P | S1 | S2 | S3 | S4 | 1. | 2. | 3. | 4. |
| J | 1 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| V |  | 1 |  |  |  |  | 0 |  |  |  | 1 |  |
| M |  |  | 1 |  | 1 |  |  |  |  |  |  |  |
| P |  |  |  | 1 |  |  |  |  | 0 |  |  |  |
| S1 |  |  |  |  | 1 |  |  |  |  | 0 |  |  |
| S2 |  |  |  |  |  | 1 |  |  | 1 |  |  |  |
| S3 |  |  |  |  |  |  | 1 |  |  |  |  |  |
| S4 |  |  |  |  |  |  |  | 1 |  |  |  |  |
| 1. |  |  |  |  |  |  |  |  | 1 |  |  |  |
| 2. |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 1 |  |  |
| 3. |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 1 |  |
| 4. |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 1 |

Dále vzhledem k jednoznačnosti hodnot znaků doplníme každý řádek a každý sloupec v každém bloku, v jejichž průsečíku je 1, hodnotou 0, viz tab 2.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | J | V | M | P | S1 | S2 | S3 | S4 | 1. | 2. | 4. |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| J | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| V | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |  | 0 |  | 0 | 0 | 0 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| M | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| P | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |  |  |  | 0 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| S1 |  |  |  |  | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| S2 |  |  |  |  | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| S3 |  |  |  |  | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| S4 |  |  |  |  | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1. |  |  |  |  |  |  |  |  | 1 | 0 | 0 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 2. |  |  |  |  |  |  |  |  | 0 | 1 | 0 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 3. |  |  |  |  |  |  |  |  | 0 | 0 | 0 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 4. |  |  |  |  |  |  |  |  | 0 | 0 | 1 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

V dalším kroku použijeme symetrie a údaje z pravé horní části schématu přeneseme do bloků v levé dolní části, viz tab. 3

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | J | V | M | P | S1 | S2 | S3 | S4 | 1. | 2. | 3. | 4. |  |  |
| J | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |  |  |  |  |  | 0 |  |  |  |
| V | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |  | 0 |  | 0 | 0 | 1 | 0 |  |  |
| M | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |  |  | 0 |  |  |  |
| P | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |  |  |  | 0 |  | 0 |  |  |  |
| S1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |  |  |  |  |
| S2 |  |  | 0 |  | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |  |  |
| S3 |  | 0 | 0 |  | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |  |  |  |  |  |
| S4 |  |  | 0 |  | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |  |  |  |  |  |
| 1. |  | 0 |  |  | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |  |  |
| 2. |  | 0 |  |  | 0 | 0 |  |  | 0 | 1 | 0 | 0 |  |  |
| 3. | 0 | 1 | 0 | 0 |  | 0 |  |  | 0 | 0 | 1 | 0 |  |  |
| 4. |  | 0 |  |  |  |  |  |  | 0 | 0 | 0 | 1 |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Využití tranzitivnosti vyžaduje zvláštní pozornost. Probíráme postupně jednotlivé řádky schématu, dokud nenajdeme v témž řádku alespoň dvě jedničky, celé sloupce pod 1 musí být shodné viz tab 4.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | J | V | M | P | S1 | S2 | S3 | S4 | 1. | 2. | 3. | 4. |
| J | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |  |  |  |  |  | 0 |  |
| V | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |  | 0 | 0 | 1 | 0 |
| M | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |  | 0 |  |
| P | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |  |  | 0 |  | 0 |  |
| S1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |  |
| S2 |  | 0 | 0 |  | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| S3 |  | 0 | 0 |  | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |  | 0 |  |
| S4 |  |  | 0 |  | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |  |  |  |
| 1. |  | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 2. |  | 0 | 0 |  | 0 | 0 |  |  | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3. | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |  |  | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 4. |  | 0 |  |  |  | 0 |  |  | 0 | 0 | 0 | 1 |
| V dalším kroku se ukazuje vhodné využití jednoznačnosti ( v některých blocích schématu se vyskytují řádky nebo sloupce se třemi nulami, takže na čtvrté místo lze doplnit 1, současně k těmto jedničkám doplníme chybějící 0) viz tab 5: | | | | | | | | | | | | |
|  | | | | | | | | | | | | |
|  | J | V | M | P | S1 | S2 | S3 | S4 | 1. | 2. | 3. | 4. |
| J | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| V | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| M | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |  | 0 |  |
| P | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |  | 0 | 0 |  | 0 |  |
| S1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |  |
| S2 |  | 0 | 0 |  | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| S3 |  | 0 | 0 |  | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |  | 0 | 0 |
| S4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1. | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 2. | 0 | 0 | 0 |  | 0 | 0 |  |  | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3. | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |  |  | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 4. | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Pomocí symetrie a jednoznačnosti doplníme zbývající pole a dostaneme výsledek vyznačený v tab. 6

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | J | V | M | P | S1 | S2 | S3 | S4 | 1. | 2. | 3. | 4. |
| J | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| V | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| M | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| P | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| S1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| S2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| S3 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| S4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1. | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 2. | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3. | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 4. | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Z této tabulky tak zjistíme:

Zvítězil jaguár se spotřebou na 2. místě.

Volvo dojelo předposlední a mělo největší spotřebu.

Mazda měla nejmenší spotřebu, ale dojelo poslední.

Polo je předposlední ve spotřebě a dojelo jako druhé auto.